

# מתמטיקה למנהל עסקים 70001

פרק 11 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות

תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות.....1

## פונקציות של שני משתנים – נגזרות חלקיות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y$ .  
חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = x^5 \cdot \ln y$ .  
חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y}$ .  
חשב את הנגזרת לפי  $x$ .

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y)$ .  
חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2}$ .  
חשב את הנגזרת החלקית לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ .

(7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  
 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1 - y)(x - y)$

(8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = xy(x - y)$ .

(9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  
 $f(x, y) = (x - 9)(2y - 6)(4x - 3y + 12)$

(10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$ .

**11)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2)$  .

**12)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)}$  .

**13)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$  .

**14)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  .

**15)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$  .

## תשובות סופיות

$$f_y(x, y) = -6x^2y + 3, \quad f_x(x, y) = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^5}{y}, \quad f_x(x, y) = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x(x, y) = \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \cdot 2x \quad (3)$$

$$f_y(x, y) = (2x + 3y) + 3(x^2 + y^2), \quad f_x(x, y) = 2x(2x + 3y) + 2(x^2 + y^3) \quad (4)$$

$$f_y(x, y) = \frac{-3x - 3y^2 - 2x^2y + 6y^2}{(x + y^2)^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x(x + y^2) - 1(x^2 - 3y)}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6x, \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 6y$$

סדר שני:

$$f_{yx} = -6, \quad f_{xy} = 0 - 6, \quad f_{yy} = 6y - 0, \quad f_{xx} = 6x - 0$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3 - 3x - 6y, \quad f_x(x, y) = 3x^2 + 3 - 3y$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xx} = 6x$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = x^2 - 2xy, \quad f_x(x, y) = 2xy - y^2$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x, \quad f_{xx} = 2y$$

סדר ראשון:

$$f_x(x, y) = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0]$$

$$f_y(x, y) = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

סדר שני:

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0], \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = e^{xy}(x^2 + xy + 1), \quad f_x(x, y) = e^{xy}(xy + y^2 + 1)$$

סדר שני:

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x \cdot (x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}, \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y \cdot (xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} \cdot x \cdot (xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

**(11) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y), \quad f_x(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x)$$

סדר שני:

$$f_{yy} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2) \cdot e^{x+y}, \quad f_{xx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

**(12) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3), \quad f_x(x, y) = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2)$$

סדר שני:

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

**(13) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2x(1+x^2+y^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

**(14) סדר ראשון:**

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

**(15) ראה סרטון.**